Введение

Учебное пособие содержит основные разделы теории линейной алгебры и аналитической геометрии, которые необходимо изучить в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

Основное внимание в пособии уделяется доступному изложению теоретических вопросов и подробному описанию решения задач. Система упражнений позволит студентам самостоятельно закрепить полученные знания.

Для успешной подготовки к сдаче экзамена приводятся типовые теоретические вопросы и задачи. Пособие содержит контрольную работу и типовой экзаменационный билет.

1. **Определители**
   1. **Определитель второго порядка**

Пусть задана таблица четырех чисел, расположенных в две строки и в два столбца

 (1)

Элементы *а*11, *а*12 – образуют первую строку, элементы *а*21, *а*22 образуют вторую строку. Элементы *а*11, *а*21 образуют первый столбец, элементы *а*12, *а*22 образуют второй столбец. Элементы *а*11, *а*22 стоят на главной диагонали, элементы *а*12, *а*21 стоят на побочной диагонали.

Определителем второго порядка для чисел (1) называется число, которое вычисляется по формуле

*а*11*а*22 – *а*12*а*21 (2)

Иначе это определение можно дать так: определителем второго порядка для чисел (1) называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали. При этом пишут

 (3)

Определитель (от латинского слова determinant) обозначается  или 

Например, вычислить определитель 

Решение: .

* 1. **Определитель третьего порядка**

Пусть задана таблица, состоящая из девяти чисел, расположенных в три строки и три столбца

 (4)

Определителем третьего порядка для таблицы чисел (4) называется число, которое вычисляется по формуле

 (5)

при этом пишут



.

Для вычисления определителя третьего порядка можно использовать правило, называемое правилом "треугольника":

- три первых слагаемых в формуле (5) берутся со знаком плюс и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными главной диагонали и с вершинами в элементах на побочной диагонали (рис.1);

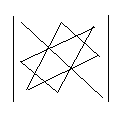


Рис. 1

- три следующих слагаемых берутся со знаком минус и мысленно строятся треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали и с вершинами в элементах, стоящих на главной диагонали

(рис.2).

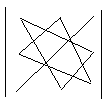


Рис.2

Например, вычислить определитель третьего порядка по правилу

«треугольника» 

Решение:



* 1. **Минор определителя**

Пусть задан определитель третьего порядка , где *i* – индекс строки, *j* – индекс столбца.

Минором любого элемента определителя , называется определитель меньшего порядка, который получен из элементов определителя, оставшихся после вычеркивания элементов *i* – строки и *j* – столбца. Обозначается минор 

Например, для определителя  найти миноры *М*11*, М*32.

Решение: а) минор *М*11 получим, вычеркивая первую строку и первый столбец определителя:

*М*11=;

б) для получения минора *М*32 вычеркнем третью строку и второй столбец определителя:

*М*32=.

* 1. **Алгебраическое дополнение**

Алгебраическим дополнением любого элемента определителя называется минор этого элемента с определенным знаком:

 (6)

Например, для определителя  найти алгебраические дополнения *А*11*, А*32.

Решение:

, .

* 1. **Разложение определителя по строке или столбцу**

Теорема: определитель n-ого порядка равен сумме произведений элементов выбранной строки или столбца на их алгебраические дополнения:

 (7)

В выражении (7) записано разложение определителя по элементам *i* строки. Аналогичное разложение можно записать по любой строке или столбцу.

Например, записать разложение определителя по второй строке и по третьему столбцу.

Решение:

1. Вычислим определитель разложением по второй строке:



1. Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:



* 1. **Свойства определителей**

1. Значение определителя не изменится, если строчки и столбцы

определителя поменять местами:



1. Значение определителя изменится на противоположное по

знаку, если две строки или два столбца определителя поменять местами:



1. Общий множитель элементов строки или столбца определителя

можно вынести за знак определителя:



1. Определитель равен нулю, если он имеет строку или столбец, состоящий из нулей.
2. Определитель равен нулю, если он имеет две одинаковых строки или два одинаковых столбца.
3. Определитель равен нулю, если он имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца.
4. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на какое-то число:

.

Например, вычислить определитель четвертого порядка, используя свойства определителей и разложение определителя по первой строке:

.

Решение: прежде чем вычислить определитель, получим в первой строчке нули, во втором и четвертом столбцах. Для этого умножим первый столбец на (-2) и сложим со вторым, второй столбец изменится, и умножим первый столбец на (-3) и сложим с четвертым, изменится четвертый столбец:



.

Решим этот же пример, получив нули в третьем столбце. Для этого к третьей строке прибавим вторую, изменится третья строка, и к четвертой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-5), изменится четвертая строка:



.

* 1. **Упражнения**

1. Вычислить определители второго и третьего порядка:
2. ; 2) ; 3) ; 4) ;

5) ; 6) ; 7) ;

8) ; 9) ; 10) .

1. Решить уравнения и неравенства:
2. ; 2) ; 3) 

4); 5) ;6) .

1. Разложить определитель по указанной строке или столбцу и вычислить его.

1) по первой строке и четвертому столбцу;

2) по третьей строке и первому столбцу.

**4.** Вычислить определители, используя их свойства:

1) ; 2) .

1. Матрицы
   1. **Определение**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов. Размер матрицы – . Обозначаются матрицы большими латинскими буквами. Элементы матриц обозначаются маленькими буквами: , где *i* – номер строки, *j* – номер столбца.

Например, задана матрица :

.

* 1. **Виды матриц**

1. Матрица размером  называется матрицей-строкой.
2. Матрица размером  называется матрицей-столбцом.
3. Матрица размером  называется квадратной порядка *m*. Для такой матрицы можно составить определитель, состоящий из элементов матрицы.

Если определитель такой матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

Например, для матрицы  найти определитель.

Определитель матрицы равен: .

1. Матрица, у которой число строк и столбцов не равны, называется прямоугольной.
2. Матрица, элементами которой являются нули, называется нуль-матрицей *О*.
3. Матрица, элементы которой задаются по формуле

, называется диагональной.

1. Диагональная матрица размером , элементы которой

задаются по формуле , называется единичной и

обозначается *Е*.

1. Матрицы одного размера  и  называются равными, если их соответствующие элементы равны ( ).
2. Противоположной для матрицы *А* называется матрица тех же размеров , определенная следующим образом: .
   1. **Операции над матрицами**
3. Сложение матриц.

Суммой матриц *Аmn* и *Bmn*называется матрица *Сmn*, элементы которой вычисляются по формуле:

. (8)

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;  - нулевая матрица;
4. .
5. Умножение матриц на число.

При умножении матрицы *А* на число α получается матрица

*С = α·А*, элементы которой определяются по формуле:

. (9)

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. .
7. Умножение матриц.

Произведением матрицы на  называется матрица , элементы которой определяются по формуле:

 (10)

то есть определяется сумма произведений соответствующих элементов *i* – строки матрицы *А* на соответствующие элементы *j* – столбца матрицы *В*. Матрицы можно умножать, если внутренние размерности совпадают.

Свойства:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Если выполняется условие , то матрицы и  называются перестановочными.

Например, выполнить действия с матрицами ; , если

; .

Решение. Умножим матрицы на числа:

, .

Найдем сумму матриц

.

Найдем произведение матриц :



.

Найдем разность матриц

.

* 1. **Транспонированная матрица**

Матрица *АТ* называется транспонированной к матрице *А*, если в матрице *А* строчки и столбцы поменять местами.

Свойства транспонированных матриц:

1. 
2. 
3. 
4. 

Например, для матрицы  построить транспонированную матрицу.

Решение: транспонированной является матрица: .

* 1. **Обратная матрица**

Матрица  называется обратной матрицей для матрицы , если справедливо следующее условие:

. (11)

Необходимые условия существования обратной матрицы:

1) матрица должна быть квадратной;

2) определитель матрицы  не равен нулю, т.е. матрица должна быть невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. составить определитель матрицы  и вычислить его;
2. если , то обратная матрица не существует;
3. если , составить присоединенную матрицу , состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы *А*;
4. транспонировать присоединенную матрицу ;
5. записать обратную матрицу: 

Например, найти обратную матрицу для матрицы *А*:.

Найдем определитель матрицы *А*: 

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы *А*:

; ; ;

; ; ;

; ; .

Составим присоединенную матрицу:

**

Транспонируем матрицу :

.

Обратная матрица имеет вид:

.

Для проверки правильности вычислений следует выполнить умножение: .

* 1. **Ранг матрицы**

Минором матрицы  называется определитель, полученный вычеркиванием *к*-строк и *к*-столбцов. Минором может быть определитель любого порядка 

Например, для матрицы найти все миноры второго порядка.

*, , *.

Рангом матрицы  называется наивысший порядок не равного нулю минора. Обозначается ранг  или . В примере миноры второго порядка не равны нулю, то .

Свойства ранга матрицы:

1) ;

2) , если все элементы матрицы *А* равны нулю;

3) если , то .

* 1. **Методы вычисления ранга матрицы**

1. Метод окаймляющих миноров.

Пусть задана матрица:

а) выбирается любой элемент матрицы, неравный нулю, и около него строится определитель второго порядка;

б) если построенный определитель не равен нулю, то около него строится определитель третьего порядка;

в) если все определители третьего порядка равны нулю, и миноры большего порядка построить нельзя, то , если найдется хотя бы один определитель третьего порядка не равный нулю, то 

1. Метод элементарных преобразований матриц.

Теорема: ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарные преобразования матриц:

1) отбрасывание строки, состоящей из нулей;

2) умножение элементов строки на любое число, не равное нулю;

3) изменение порядка строк;

4) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на любое число, не равное нулю;

5) транспонирование матрицы.

После элементарных преобразований матрицу приводят к матрице трапецеидального вида.

Например, для матрицы  найти ранг матрицы обоим методами.

Первый метод. Найдем миноры первого, второго и третьего порядков, выстраивая их около первого члена матрицы:

, , .

Ответ: .

Второй метод. Приведем матрицу к трапециидальному виду:

*~~~*.

Протокол действий: 1) переставили первый и четвертый столбцы местами; 2) от второй строки отняли четыре первых строки (С2 *–* 4С1); 3) от третьей строки отняли две первых (*С*3*-* 2С1); 4) из второго столбца вычли четвертый столбец. Теперь легко найти неравный нулю минор максимального порядка и ранг матрицы: 

* 1. **Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований**

Элементарные преобразования матриц можно использовать для получения обратных матриц, присоединяя к данной матрице единичную матрицу: .

Например, для матрицы  найти обратную матрицу.

Используем метод элементарных преобразований, получим:

~~  ~

~~  ~

~~  ~

~ 

Протокол действий:

1) элементы второй строки умножим на (-1) и поменяем местами с первой строкой;

2) от второй строки отнимем две первых строки (*С*2*-*2*С*1);

3) поделим вторую строку на 9 и третью строку на 2;

4) от третьей строки отнимем вторую строку (*С*3*-С*2);

5) поделим третью строку на 4/3;

6) из второй строки вычтем третью, умноженную на 2/3 (*С*2*-*2/3*С*3);

7) к первой строке прибавим три вторых строки и одну третью (*С*1*+*3*С*2*+С*3).

В результате получили обратную матрицу

.

* 1. **Упражнения**

1. Выполнить действия:
2. *А+3В-2С*, если



1. *АВ+ВС*, если



1. *АВ-Е* и *ВА-Е*, если



1. *Е-(А-В)С*, если



1. Найти обратную матрицу *А-1*и проверить выполнение условия

*А-1А=АА-1=Е*, если .

1. Найти обратную матрицу для матриц:

1)  2)  3) 

4. Найти ранг матрицы:

1)  2)  3) 

4) 

**3. Решение систем линейных уравнений**

* 1. **Общие сведения**

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

 (12)

где  - коэффициенты при неизвестных,  - свободные члены, – неизвестные.

Если система (12) имеет решение, то она называется совместной. Если система не имеет решения, то она называется несовместной.

Если система (12) имеет единственной решение, то она называется определенной. Если система имеет множество решений, она называется неопределенной.

Если все свободные члены системы (12) равны нулю, система называется однородной. Такая система всегда совместна, имеет тривиальное решение – нулевое.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

1. матрица коэффициентов при неизвестных

*А=,*

1. матрица неизвестных ,

3) матрица свободных членов .

Тогда система уравнений может быть записана в матричном виде:

. (13)

Вопрос о совместности системы помогает решить теорема Кронекера-Капелли.

Теорема: Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы *.*

Матрица называется расширенной матрицей системы.

Если ранг матрицы *А* равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы *А* меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

При условии  уравнения системы зависимые. При условии  уравнения системы независимые.

Пусть  Переменные  называются базисными, основными, если базисный минор (определитель из коэффициентов при этих переменных) не равен нулю. Их число равно Число базисных решений меньше числа сочетаний



Остальные  неизвестных называются не основными (свободными). Свободным переменным в решении могут присваиваться следующие значения:

1) *С=0* для базисных решений;

2) *С=Сi* для общего решения;

3) *С* равно строкам единичной матрицы для фундаментального решения.

* 1. **Методы решения систем линейных уравнений**

1**)** Метод Крамера.

Теорема Крамера: Пусть Δ - главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных; Δj – определители, полученные из главного, заменой *j* –того столбца этого определителя столбцом свободных членов. Тогда, если Δ≠0, то система имеет единственное решение, определяемое равенствами:

 (14)

Формула (14) называется формулой Крамера.

Исследование наличия решения системы:

а) если  система имеет единственное решение;

б) если  но хотя бы один из определителей для неизвестных не равен нулю, то система не имеет решения;

в) если  и все определители для неизвестных равны нулю, то система имеет множество решений.

Например, найти решение системы уравнений



Решение: найдем главный определитель системы

.

Составим определители для неизвестных и вычислим их:



Ответ: .

2**)** Метод обратных матриц.

Систему линейных уравнений (12) представим в матричной форме:

.

Найдем решение уравнения: 

Решение системы можно записать так:

 (15)

Например, найти решение системы уравнений матричным методом



Решение: введем матрицы: ; .

Определитель матрицы  уже найден Следовательно, обратная матрица существует.

Найдем обратную матрицу: .

Вычислим матрицу :





Ответ: .

3**)** Метод Гаусса.

Метод Гаусса иначе называется методом исключения переменных. Метод основан на преобразовании уравнений с использованием преобразований, называемых гауссовыми.

К преобразования Гаусса относятся следующие действия:

а) можно менять уравнения системы местами;

б) умножать уравнение на любое число, не равное нулю;

в) к любому уравнению, умноженному на число, не равное нулю, можно прибавлять другое уравнение, умноженное на любое число, не равное нулю.

Суть метода Гаусса:

1) в системе выбираем уравнение, в котором имеется неизвестное с ненулевым коэффициентом (лучше выбирать коэффициент 1). Это уравнение объявляем ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению, называем главным.

2) ведущее уравнение ставим на первое место и с помощью преобразований Гаусса исключаем главное неизвестное из остальных уравнений;

3) данную процедуру применяем к следующим уравнениям.

Например, найти решение системы уравнений методом Гаусса



Решение: запишем систему в виде расширенной матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов; используя преобразования Гаусса, приведем матрицу к треугольному виду:

==

Теперь вычислим неизвестные:

, , .

Ответ: 

В результате исключения неизвестных последнее уравнение может иметь вид:

1) , то система имеет единственное решение;

2) , то система не имеет решения;

3) , то система имеет множество решений.

Например, найти все базисные решения системы уравнений



Решение: система имеет три уравнения и четыре неизвестных. Выполним преобразования матрицы коэффициентов:

.

Ранг матрицы коэффициентов . Следовательно,

одну строку можно отбросить. Получим систему 

Найдем число базисных решений: .

1) Пусть базисными будут  и  , 

 .

Тогда первое базисное решение будет иметь вид .

2) Пусть базисными будут  и  , 

 .

Тогда первое базисное решение будет иметь вид .

3) Пусть базисными будут и   

Тогда первое базисное решение будет иметь вид .

4) Пусть базисными будут  и  , 

Тогда первое базисное решение будет иметь вид .

5) Пусть базисными будут и  , 

Тогда первое базисное решение будет иметь вид .

6) Пусть базисными будут  и  , 

Тогда первое базисное решение будет иметь вид.

Ответ: получили шесть базисных решений: 

* 1. **Решение систем однородных линейных уравнений**

Система из m линейных уравнений с n неизвестными при нулевых свободных членах называется однородной

 (16)

Система (16) всегда совместна, она имеет тривиальное решение 

Система (16) имеет нетривиальное решение, если

1. 
2. 

Эти условия аналогичны выполнению условия 

Пусть – решение системы уравнений (16). Запишем это решение в виде строки .

Свойства решений:

1. если строка  - решение системы (16), то

является решением этой системы, - некоторое число, неравное нулю;

1. если  и  решения системы (16), то при любых *С*1и С2 их комбинация тоже является решением системы:

**.

Выражение  называется линейной комбинацией решений системы.

Если , где  одновременно не равные нулю, то строки (решения)  называются линейно зависимыми.

Если  только при , то решение  называются линейно независимыми.

Система линейно независимых решений  называется фундаментальной, если каждое решение системы (16) является линейной комбинацией решений .

Если  то фундаментальная система решений (16) состоит из  решений.

Общее решение системы (16) имеет вид:

. (17)

Такое решение называется фундаментальной системой решений, где  - производные числа 

Например, решить систему уравнений и найти фундаментальную систему решений



Решение: найдем ранг матрицы коэффициентов при неизвестных:

.

Ранг . Следовательно, за базисный минор можно взять любой минор второго порядка.

1. Пусть базисный минор состоит из коэффициентов переменных

.

- основные переменные;  – неосновные переменные. Рассмотрим систему



Для получения фундаментального решения  поочередно заменяем неосновные переменные  элементами строк единичной матрицы .

1)  

2)  

Ответ: фундаментальная система решений 

* 1. **Упражнения**

1. Решить системы уравнений методами Крамера и обратной матрицы:

1)2)3)

1. Решить системы уравнений методом Гаусса:

1) 2) 

3. Найти фундаментальную систему решений:

1)  2) 

**4. Использование матриц, определителей и систем уравнений в экономике**

* 1. **Использование матриц в экономике**

Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции  и использует для этого три вида сырья . Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны план выпуска каждой продукции и стоимость единицы каждого типа сырья (в руб., табл.1).

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| сырье  продукция |  |  |  | План  выпуска |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Стоимость ед. сырья |  |  |  |  |

Пусть матрица *А* – матрица нормы расхода сырья на производство продукции .

Матрица  - матрица плана выпуска продукции.

Матрица  - матрица стоимости единицы каждого вида сырья. Используя матричное исчисление, можно найти:

1. матрицу затрат сырья ,
2. общую стоимость сырья **
3. матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции **.

Пусть известны данные о дневной производительности двух предприятий, выпускающих три вида продукции с потреблением трех видов сырья, а также время работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья (табл. 2).

*Таблица 2*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| продукция | производительность | | затраты сырья | | | план  выпуска продукции |
| I предпр. | II предпр. |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | кол-во рабочих дней | | цена вида сырья | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | стоимость доставки сырья | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Можно найти:

1. годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий; составим матрицу производительности предприятий по каждому виду продукции:

, ;

2) годовую потребностькаждого предприятия по каждому виду сырья.

Введем матрицу затрат на единицу продукции:

.

Дневной расход по типам сырья на предприятиях найдем как произведение матрицы затрат на матрицу производительности: .

Годовая потребность сырья каждым предприятием найдется как ;

1. годовую сумму необходимого кредитования каждого предприятия для закупки сырья.

Суммы кредитования предприятий для закупки сырья можно определить как компоненты матрицы стоимости общего годового запаса сырья для каждого предприятия .

* 1. **Использование систем линейных уравнений**

Задачи о прогнозе выпуска продукции по запасам сырья. Пусть некоторое предприятие выпускает три вида продукции  и использует для этого три вида сырья . Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции заданы таблицей. В ней же указаны запасы каждого типа сырья (табл.3) .

*Таблица 3*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| сырье  продукция |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| Общий запас сырья |  |  |  |

Пусть  – матрица норм расхода сырья 

каждым предприятием на производство *i* – продукции ,  – матрица запасов сырья .

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Пусть  - объемы выпуска продукции. Тогда при условии полного расходования запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения (уравнения):



* 1. **Многоотраслевая экономика**

Многоотраслевое хозяйство требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль является и потребителем, и производителем. Возникает непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.

Впервые эта проблема была выдвинута в 1936 году в трудах американского экономиста В.В. Леонтьева (Василий Васильевич Леонтьев, выходец из России, лауреат Нобелевской премии (1906-1999)). Известна как математическая модель Леонтьева. Модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа. Метод «выпуск-затраты» широко применяется в практике прогнозирования и программирования экономики.

* 1. **Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)**

Пусть имеется n отраслей экономики, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутренние нужды отраслей и потребление продукции другими отраслями, часть продукции предназначена для личного и общественного потребления (вне сферы материального производства).

Пусть  - общий (валовой) объем продукции *i*-ой отрасли , - объем продукции *i*-ой отрасли, потребляемой *j*-ой отраслью в процессе производства , - объем конечного продукта *i*-ой отрасли для непроизводственного потребления. Тогда валовой объем продукции *i*-отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта:

 (18)

Уравнение (18) называется соотношениями баланса.

Если все величины уравнения (18) имеют стоимостное выражение, то уравнения (18) называют стоимостный межотраслевой баланс.

Назовем коэффициентами прямых затрат продукции *i*-отрасли на производство единицы продукции *j*-отрасли выражение:

 (19)

Если предположить, что в течение некоторого времени (месяц, квартал, год) коэффициенты  будут постоянны и зависеть только от сложившейся технологии производства, то зависимость материальных затрат, от валового выпуска будет линейной, т.е.

. (20)

Поэтому модель межотраслевого баланса называется линейнойи

пишут:

 (21)

Введем векторы:

1. вектор валового выпуска - ,
2. вектор конечного продукта - 

Введем матрицу прямых затрат 

Тогда уравнение баланса в матричной форме может быть записано так:

 (22)

Основная цель межотраслевого баланса: отыскать такое решение *X*, которое при известной матрице прямых затрат *А* обеспечит заданный вектор конечного продукта *Y*.

Найдем решение матричного уравнения:



Если матрица  не вырожденная, т.е. , то

. (23)

Матрица называется матрицей полных затрат. Каждый

элемент  матрицы  - это величина валового выпуска продукции

*i*-ой отрасли для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-ой отрасли. Значения .

Решение уравнения (22) существует при условии, что матрица  продуктивна. Матрица  называется продуктивной, если для любого  существует решение . Модель Леонтьева в этом случае называется продуктивной.

Существуют разные критерии продуктивности матрицы . Для решения задач будем использовать один из них: матрица  - продуктивна, если максимальная сумма элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы один из столбцов имеет сумму элементов строго меньше единицы, т.е. для 

 (24)

и сумма элементов в столбце меньше единицы

 (25)

Рассмотрим пример. Заданы две отрасли. Нормы потребления и объемы выпуска продукции этими отраслями заданы в табл. 4.

*Таблица 4*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасль | Потребление | | Конечный продукт | Валовой выпуск |
| 1 | 2 | Y | X |
| 1 | 100 | 160 | 240 | 500 |
| 2 | 275 | 40 | 85 | 400 |

Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, второй отрасли на 20%.

Решение. Введем матрицы: потребления ,

валового выпуска и конечного продукта .

Составим матрицу прямых затрат, оценим коэффициенты матрицы:

, ,

, .

Матрица прямых затрат имеет вид: . Матрица

продуктивна (сумма по столбцам: 0,75 и 0,5).

Найдем матрицу полных затрат :

.

Найдем новый вектор конечного продукта: .

Вычислим необходимый объем валового продукта для матрицы :



* 1. **Упражнения**

1. Пусть швейное предприятие выпускает три вида продукции юбки, блузки и платья, при этом использует три вида тканей: хлопок, лен, шелк. Нормы расхода каждого вида тканей на изготовление единицы продукции заданы в таблице. В ней же указаны план выпуска каждой продукции, стоимость единицы каждого вида тканей, стоимость доставки тканей на предприятие (табл. 5).

*Таблица 5*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ткань  Изделие | Хлопок (м) | Лен (м) | Шелк (м) | План  выпуска(шт.) |
| Юбка | 2 | 1,5 | 1 | 100 |
| Блузка | 0,5 | 1 | 1,5 | 120 |
| Платье | 1 | 1 | 3 | 110 |
| Стоимость ткани (руб./м) | 70 | 110 | 250 |  |
| Стоимость доставки ткани (руб./м) | 0,5 | 0,6 | 0,8 |  |

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу затрат на перевозку тканей, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции, общую стоимость производства продукции.

1. Известно, что на предприятие завезли ткани в следующем объеме: хлопка – 530 м, льна – 345 м, шелка – 590 м. Найти план производства юбок, блузок и платьев, используя нормы расхода предыдущей задачи. Оценить общий доход предприятия, если известно, что предприятие реализует изготовленную продукцию по ценам: юбка – 700 руб., блузка – 800 руб., платье – 2000 руб.
2. Для производства печатных каталогов, буклетов и листовок предприятию требуется три вида сырья: бумага, краски, скрепки. Нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, стоимость сырья и готовой продукции заданы в табл. 6.

*Таблица 6*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Сырье  Изделие | Бумага | Краски | Скрепки | План  выпуска(шт) |
| Каталог | 6 | 5 | 3 | 100 |
| Буклет | 3 | 3 | 4 | 210 |
| Листовка | 2 | 4 | 2 | 300 |
| Стоимость сырья (руб./усл.ед.) | 10 | 20 | 0,1 |  |
| Запасы сырья (усл.ед.) | 1420 | 1700 | 1160 |  |

Найти матрицу затрат сырья, общую стоимость сырья, матрицу стоимостей сырья на изготовление единицы продукции.

1. Используя запасы сырья и нормы расхода сырья на изготовление печатной продукции предыдущей задачи, найти план производства предприятия и его прибыль, если готовую продукцию предприятие собирается реализовывать по ценам: каталог – 50 руб., буклет – 2 руб, листовка – 1 руб.
2. **Векторы**

**5.1 Определение и начальные сведения о векторах**

Любые две точки *А*,*В* определяют направленный отрезок, если точка *А* определяет начало, точка *В* – конец отрезка, направление задается от *А* к *В*.

Направленный отрезок называется вектором. Обозначается .

Расстояние между началом и концом вектора называется длинной или модулемвектора, обозначается .

Вектора  называются коллинеарным**и**, если они лежат на одной прямой или принадлежат параллельным прямым, при этом при совпадении направления их называют противоположно направленные  если направление векторов противоположное, векторы называются сонаправленные 

Векторы называются равными , если они коллинеарные,

одинаково направлены и их длинны равны: .

Векторы  называются противоположными, если они коллинеарные, противоположно направлены и их длины равны:

.

Три вектора  называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или ей параллельны.

**5.2 Линейные операции над векторами**

Пусть даны два вектора .

Суммой двух векторов  называется вектор , который идет из начала вектора  в конец вектора , если вектор  приложен к концу вектора (рис. 3).







Рис. 3

Разностью векторов  называется такой вектор , который в сумме с вектором дает вектор :  (рис.4).







Рис. 4

При вычислении по правилу параллелограмма суммой векторов является диагональ, выходящая из общего начала этих векторов, а разностью векторов является диагональ, не имеющая общего начала с векторами .

Произведением вектора  на число называется вектор , коллинеарный вектору , имеющий длину равную  и тоже

направление, что и вектор , если , и противоположное направление, если (рис.5).







Рис. 5

Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым или нуль вектором: 

Единичным вектором , или ортом, называется вектор, сонаправленный с вектором , координаты которого получены делением координат вектора  на его длину: . Тогда любой вектор можно представить в стандартной форме: 

* 1. **Основные свойства линейных операций над векторами**

1.  - переместительный закон;

2. - сочетательный закон сложения;

3.  - сочетательный закон умножения;

4.  - распределительный закон относительно суммы чисел;

5. - распределительный закон относительно суммы векторов;

6. ;

7. .

8. Теорема о коллинеарных векторах.

Два ненулевых вектора  коллинеарные тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

. (26)

9. Теорема о компланарных векторах.

Три ненулевых вектора  компланарные тогда и только тогда, когда они принадлежат одной плоскости или один из них является линейной комбинацией двух других:

 - числа. (27)

Рассмотрим пример. Пусть заданы вектора . Покажем, что они компланарные:



т.е. вектор  является линейной комбинацией двух других векторов.

**5.4 Проекция вектора на ось**

Пусть задан вектор  и некоторая ось . Из начала и конца вектора опустим перпендикуляры на ось, точки пересечения с осью обозначим (рис. 6).

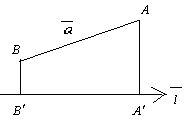


Рис. 6

Проекцией вектора **** на ось  называется длинна  направленного отрезка  со своим знаком: , где знак «» зависит от совпадения направления вектора  и оси  или несовпадения.

Теорема. Проекция вектора  на ось  равна длине вектора  умноженной на косинус угла между вектором  и осью :

 (28)

Следствие 1: проекция вектора на ось:

1) положительная, если угол - острый;

2) отрицательная, если угол  - тупой;

3) равна нулю, если угол .

Следствие 2: проекции равных векторов на одну и ту же ось, равны:

.

Теорема.Проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось:



Теорема.При умножении вектора  на число, его проекция умножается на это же число, т.е.



**5.5 Проекции вектора в прямоугольной системе координат**

Пусть в пространстве задана система координат *XYZO* и произвольный вектор .

Проекции *X, Y, Z* вектора  на оси координат называются его координатами, при этом пишут: .

Теорема 6. Каковы бы ни были точки , координаты вектора  определяются по формулам:

 (29)

Следствие 1: если  выходит из начала координат, т.е. , то координаты  равны координатам его конца;

Следствие 2:  (30)

Следствие 3: Если  и , то

 (31)

Следствие 4: Если , то  (32)

Следствие 5: Если , то  (33)

**5.6 Направляющиеся косинусы вектора**

Пусть дан произвольный вектор , выходящий из начала координат, не совпадающий с осями координат образующий с ними углы . Найдем длину вектора:

.

В силу определения проекции вектора на ось получим:

,

, (34)

.

Выразим косинусы углов, которые называются направляющими косинусами:

,

, (35)

.

Основное свойство косинусов: .

**5.7 Разложение вектора по базису**

Упорядоченная тройка неколлинеарных векторов  называется базисо**м** и любой вектор  может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов :

, (36)

где  - координаты вектора  в базисе векторов (). В прямоугольной системе координат за базис выбирают единичные вектора осей координат: , . Тогда справедлива теорема.

Теорема**.** Любой вектор может быть единственным образом представлен в виде

- числа. (37)

Такое представление называется разложением по базису **,** а вектор  имеет координаты .

Например, записать разложение вектора по базису****. Вектор будет иметь вид: 

**5.8 Скалярное произведение векторов**

Скалярным произведением двух ненулевых векторов  называется число (скаляр) равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

, (38)

или

= (39)

Типичным примером скалярного произведения в физике является формула работы , где  - сила, точка приложения которой перемещается на расстояние .

Свойства скалярного произведения векторов:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. , если , и, обратно, , если .

Скалярное произведение можно находить в координатах. Справедлива теорема: если векторы  заданы своими координатами: , , то их скалярное произведение определяется формулой:

 (40)

Следствие 1: , если  (41)

Следствие 2:  (42)

**5.9 Векторное произведение векторов**

Тройка векторов называется упорядоченной, если указано, какой из них читается первым, какой второй и т.д.

Упорядоченная тройка векторов называется правой, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой (рис.7).

















Рис. 7

Векторным произведение**м** двух векторов  называется вектор , удовлетворяющий следующим условиям:

1. длина  равна произведению модулей векторов на синус угла

между ними:

 ; (43)

2. вектор  перпендикулярен каждому из векторов ;

3. векторы  и  образуют правую тройку векторов.

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

Основные свойства векторного произведения:

1. (произведение векторов некоммутативно);

2.  (из определения);

3. , т.е. число можно выносить за знак векторного произведения;

4. 

5. , если  - коллинеарные.

Векторное произведение можно найти в координатах, если векторы заданы в координатной форме. Справедлива теорема: если векторы  заданы своими координатами: , то векторное произведение  определяется формулой:

 (44)

**5.10 Смешанное произведение трех векторов**

Смешанным произведением трех векторов  называется число,

равное скалярному произведению вектора  на векторное произведение :

. (45)

Свойства смешанного произведения:

1. ;

2. если векторы компланарные, ; (46)

3.  где  - объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

4.  где  - объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах.

Смешанное произведение в координатной форме можно посчитать, используя теорему: если векторы  заданы своими координатами , то

. (47)

**5.11 Упражнения**

1.Найти длину и направляющие косинусы вектора .

2. Найти проекцию вектора  на вектор .

3. Найти площадь и углы параллелограмма, построенного на векторах  и .

4. Проверить, являются ли компланарными векторы ,

, .

5. Заданы векторы , . Найти а);

б); в); г).

6. Найти угол между векторами  и , если , .

7. Разложить вектор  по базису векторов , , .

8. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах ; ; .

9. При каком значении  векторы ,  перпендикулярны.

10. Найти модуль векторного произведения векторов , .

**6.*N* – мерный вектор и векторное пространство**

* 1. **Определение *N* – мерного вектора**

*N***-**мерным вектором называется упорядоченная совокупность действительных чисел, записываемых в виде: , где – *i*-тая компонента вектора. Например, в экономике используются векторы - потребительская корзина, - соответствующие цены товаров.

Два вектора называются равными , если равны соответствующие компоненты 

* 1. **Операции над векторами**

1. Сложение векторов.

Суммой векторов  одной размерности называется вектор  если его компоненты вычисляются по формуле:

1. Умножение вектора на число.

Произведением вектора  на число  называется вектор , компоненты которого вычисляются по формуле: , при этом 

Свойства операций:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

7)  - противоположный вектор, следовательно 

8) 

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше свойствам, называется векторным пространством 

Если под векторами  рассматривать элементы любой природы, то такое множество образует линейное пространство.

* 1. **Линейная зависимость векторов**

Вектор  называется линейной комбинацией векторов  векторного пространства , если выполняется равенство

 (48)

-любые числа.

Векторы  называются линейно зависимыми, если существуют такие числа , одновременно не равные равны, что справедливо равенство

 (49)

Если равенство (49) выполняется только при , то векторы называются линейно независимыми.

Теорема*:* если векторы  - линейно зависимые, то хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов.

На плоскости два линейно независимых вектора – это не коллинеарные вектора. Тогда любой третий вектор можно представить в виде: .

В пространстве три некомпланарных вектора можно считать линейно независимыми и любой четвертый представить в виде:

.

Свойства векторов линейного пространства:

1. если среди векторов  имеется нулевой вектор , то эти векторы линейно зависимы;
2. если часть векторов  линейно зависимы, то и все векторы линейно зависимы.

Например, проверим, являются ли векторы линейно зависимыми

?

Решение. Составим равенство: ,



.

Пусть , . Система имеет множество решений . Следовательно, заданные векторы линейно зависимые.

* 1. **Размеренность и базис векторного пространства**

Векторное (линейное) пространство  называется n-мерным, если в нем существует  линейно независимых векторов, а любые  векторов – линейно зависимые.

 – называется размерностью пространства  и обозначается

. Например,  – плоскость, ,  – трехмерное

пространство, 

Множество *n* независимых векторов n-мерного пространства называется базисом.

Пусть имеется *n*-мерное пространство , – базис  Любой вектор  - линейно зависимый, следовательно,

,

 ,  (50)

, (51)

где  - координаты вектора .

Выражения (50), (51) являются разложениями вектора по базису ,  – координаты вектора  в этом базисе. Такое разложение единственное.

Теорема: если  – система линейно независимых векторов пространства  и любой вектор  линейно выражается через них, то пространство  является *n*-мерным и векторы  являются его базисом.

Покажем, что следующие вектора образуют базис

.

Решение: если  образуют базис, то они линейно независимы, следовательно :



- линейно-независимые векторы и составляют базис.

* 1. **Переход к новому базису**

Пусть пространство  имеет два базиса:  – старый;  - новый:

 (52)

Матрица коэффициентов этой системы называется матрицейперехода от старого  к новому  базису:

 (53)

Обратный переход от  к  осуществляется с помощью обратной матрицы *А-*1.

Пусть задан вектор . Запишем его в разных базисах:

1. в базисе  (в старом),
2. в базисе  (в новом).

Тогда

 или  (54)

Например, в базисе  заданы векторы  и . Выразить вектор  в базисе векторов .

Решение: а) Покажем, что  образуют базис:

,

следовательно векторы образуют базис.

б) Выразим связь между базисами:

 матрица перехода .

в) Найдем обратную матрицу *А*-1

.

г) По формуле (47) найдем координаты  в новом базисе:

.

* 1. **Скалярное произведение векторов.**

**Евклидово пространство**

Пусть заданы два вектора в пространстве :  и . Скалярным произведением двух векторов  называется число, вычисляемое по формуле:

. (55)

Свойства скалярного произведения:

1. ,

2. ,

3. , где - действительное число,

4. , если , , если , 

Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющих свойствам 1-4, называется евклидовым пространством.

Длиной (нормой, модулем**)** вектора  в евклидовом пространстве называется корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя:

. (56)

Свойства длины вектора:

1) ;

2) - действительное число;

3) - неравенство Коши-Буняковского;

4) - неравенство треугольника.

Угол между векторами определяется по формуле:

, . (57)

Два вектора называются ортогональными**,** если их скалярное

произведение равно нулю:

. (58)

Вектор называется единичным**,** если .

Если единичные векторы  n-мерного евклидового пространства попарно ортогональны и норма каждого вектора равна 1, то векторы  образуют ортонормированный базис.

Теорема: Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Например, в трехмерном пространстве таким базисом является система векторов .

**6.7. Упражнения**

1.Определить, являются ли векторы , ,  линейно зависимыми.

2. В базисе  заданы векторы ,  . Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразить вектор .

3. В базисе заданы векторы , . Показать, что они образуют базис и в этом базисе выразите вектор .

4. В базисе  заданы векторы   . Найти вектор  в этом базисе.

5. Найти длину вектора 

6. Найти косинус угла между векторами  и 

7. При каком значении параметра  векторы  и ортогональны.

1. **Линейныеоператоры**
   1. **Определение линейного оператора**

Пусть заданы два линейных пространства: . Если задан закон, по которому каждому вектору  ставится в соответствие единственный вектор , то говорят, что задан оператор (преобразование, отображение) , действующий из  в , и пишут

. (59)

Вектор  называется образом вектора , вектор называется прообразом вектора . Если пространства совпадают, то оператор  отображает пространство  в себя.

Оператор  называется нулевым,если переводит все векторы в нулевые векторы: .

Оператор  называется тождественным, если переводит любой вектор  в себя: .

Оператор  называется линейным, если для любых векторов  и любого действительного числа  выполняются равенства:

1) (свойство аддитивности);

2) (свойство однородности).

Пусть в пространстве  задан базис . Любой вектор можно разложить по этому базису: . Тогда . Каждый из векторов можно разложить по базису :





………………………



Распишем :

=++…

+=

=++…

+.

С другой стороны . Так как разложение по базису единственное, то справедливы равенства:





…………………….

.

Матрица коэффициентов данной системы называется матрицей операторав базисе , ранг матрицы называется рангом оператора.

Вывод**:** каждому линейному оператору  соответствует матрица в данном базисе и наоборот: каждой матрице -го порядка соответствует линейный оператор -мерного пространства.

Введем для векторов  матрицы-столбцы:, .

Тогда систему равенств можно записать в виде матричного уравнения:

. (60)

Рассмотрим пример. Найти образ  вектора , если оператор  задан матрицей

.

Решение. Найдем матрицу .

Следовательно, образ вектора имеет вид: ****.

* 1. **Действия над операторами**

1. Суммой операторов **и** называется оператор , такой, что .
2. Произведением оператора **** на число называется такой оператор, что .
3. Произведением операторов ** и **называется такой оператор, что .

Сами операторы , ,  являются линейными.

* 1. **Матрица оператора в новом базисе**

Пусть задано два базиса  и  в пространстве . В каждом из них имеются матрицы  оператора . Найдем связь этих матриц. Известно, что  и , где - матрица перехода из базиса векторов  в базис векторов .

Из условия  следует, что . Тогда:

 , , ,

, ,

Следовательно,

. (61)

Например, найти матрицу  линейного оператора в базисе , заданного матрицей  в базисе : , , .

Составим матрицу перехода из базиса в базис: .

Найдем обратную матрицу для матрицы : .

Тогда .

* 1. **Собственные векторы и собственные значения**

Вектор  называется собственным вектором линейного оператора , если найдется такое число , что

 (62)

Число  называется собственным значением оператора , соот-ветствующим вектору :

 (63)

Вектор  переводится в ему коллинеарный вектор:

 (64)

 (65)

или

 (66)

Система (65) имеет нулевое решение. Для того, чтобы она имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы

 (67)

Определитель матрицы  называется характеристическим многочленом оператора  или матрицы , а само уравнение (67) называется характеристическим уравнением **** или ****.

Пусть оператор  (матрица ) имеет  линейно независимых собственных векторов  с собственными числами . Векторы  примем за базисные. Тогда

,

( , если  и , если ).

Следовательно, матрица оператора  в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид:

 (68)

Верно и обратное: если  линейного оператора  имеет диагональный вид в некотором базисе, то все векторы этого базиса являются собственными векторами .

Например, найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора  и нормировать их, если задана матрица оператора:



Решение. Составим характеристическое уравнение:



, 



Находим собственные векторы:

1) при ;



Получим систему однородных уравнений:





2) при  



Получим систему однородных уравнений:



3) при ;



Получим систему однородных уравнений:



Вектора  при  являются собственными векторами. Числа - собственные значения.

Нормируем полученные собственные векторы. Подберем  так, чтобы длина вектора равнялась единице:

.



.

Ответ: 

* 1. **Линейная модель обмена**

**(модель международной торговли)**

Пусть имеется *n* стран . Национальный доход каждой страны .

Пусть  - доля национального дохода, которую страна  тратит на покупку товаров страны . Предположим, что национальный доход тратится либо на закупку товаров или внутри страны, на импорт из других стран, следовательно, выполняется условие:

 (69)

Составим матрицу , которая называется структурной матрицей торговли. Сумма в столбцах равна единице.

Выручка от торговли для любой страны  равна:

. (70)

Для баланса торговли необходимо, чтобы выручка от торговли для каждой страны была не меньше, чем ее национальный доход. Такое условие называется условием бездифицитности:

 (71)

Рассмотрим матричное уравнение . Его можно записать так:

. (72)

Таким образом, задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы , соответствующего собственному значению .

Например, требуется найти соотношение цен трех товаров, если набор этих товаров  имеют одинаковую стоимость.

Пусть имеется три вида товаров  и их цены . Составим систему уравнений:

 , следовательно 



.

Например, при , .

Ответ: 15:10:3 – соотношение цен трех товаров.

* 1. **Квадратичные формы**

Квадратичной формой **** от  переменных называется сумма

**** (73)

где **-** действительные числа, причем

****. (74)

Матрица **, ,** называется матрицей квадратичной формы. Матрица **** является симметрической, так как элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

Например, для квадратичной формы трех переменных ****составить матрицу.

Решение. Составим матрицу, используя свойство (74):

****

Ранг матрицы **** называется рангом квадратичной формы.

Пусть задана матрица переменных ****. Выражение (73) в матричной форме запишется так:

**** (75)

Пусть заданы две матрицы **** и ****, которые связаны

соотношением: , где матрица , ****, является невырожденной матрицей перехода от матрицы к матрице Тогда

****

****

Выво**д**: при невырожденном линейном преобразовании  матрица квадратичной формы (73) принимает вид:

 (76)

Квадратичная форма (73) называется канонической, если все ее коэффициенты **** при , а матрица **** является диагональной:

**** (77)

Ранг квадратичной формы равен числу не равных нулю коэффициентов канонической формы.

Теорема: Любая квадратичная форма (73) с помощью невырожденных линейных преобразованиях переменных может быть переведена в канонический вид (77).

Такое преобразование не единственное, одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду по-разному. Но при этом различные канонические формы обладают рядом общих свойств: ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях.

Среди приемов перевода квадратичной формы в каноническую форму можно выделить две:

1. выделение полных квадратов для переменных;
2. использование ортогональных преобразований.

Пусть задана квадратичная форма , известна ее матрица ****. Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Пусть имеется матрица перехода  от одного ортонормированного базиса  в другой :

, (78)

- нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам . Имеем формулы перехода:

. (79)

Квадратичная форма переходит в каноническую форму:

, ****. (80)

Квадратичная форма (73) называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется условие: ****Существуют разные методы определения знака квадратичной формы.

Теорема 1: для того, чтобы форма ****была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения **** матрицы **** были положительные (отрицательные).

Теорема 2 (критерий Сильвестра): для того, чтобы квадратичная форма ****была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы квадратичной формы были положительны: **;** дляотрицательно определенной квадратичной формы знаки главных миноров должны чередоваться, начиная с отрицательного значения: ****

****

Если квадратичная форма не поддается определению, то ее называют знаконеопределенно**й**.

**7.7 Упражнения**

1. В пространстве линейный оператор  в базисе  задан матрицей . Найти образ  вектора .

2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

а); б); в) 

3. В базисе  оператор  задан матрицей . Найти матрицу оператора  в базисе ; .

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму:

а);

б)

Составить матрицы квадратичной формы.

5. Исследовать на знакоопределенность квадратичные формы:

а);

б)

Составить матрицы квадратичной формы.

6. Найти соотношение цен трех товаров, если наборы этих товаров

